

सत्रीय कार्य पुस्तिका
स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम.)

उच्च स्तरीय कलन

1 जनवरी 2019 से 31 दिसंबर 2019 तक वैध

सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

केवल बी.एससी. छात्रों के लिए

- बी.एससी. कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 या 64), **कम से कम दो और अधिकतम चार** विषयों, में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 24 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 6 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।



विज्ञान विद्यापीठ
 इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
 मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068
 (2019)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

- 1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या.....	
नाम :	
पता :	
.....	
पाठ्यक्रम संख्या :	
पाठ्यक्रम शीर्षक :	
सत्रीय कार्य संख्या :	
अध्ययन केंद्र :	दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2019 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2019 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2020 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: MTE-07
सत्रीय कार्य कोड : MTE-07/TMA/2019
अधिकतम अंक : 100

1) बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। (10)

क) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ का अस्तित्व नहीं होता

ख) यदि $z = \frac{x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}$, तब $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{20} z$

ग) फलन $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 7$ का बिंदु (1,1) पर सर्वाधिक उच्चिष्ठ होता है।

घ) फलन $f(x, y) = \frac{2y}{3x}$ और $g(x, y) = \frac{3x-2y}{3x+2y}$ फलनिकत आश्रित है।

ड.) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ प्रकार I और प्रकार II दोनों प्रकार वाले प्रदेश है।

2) क) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित फलन की सीमा का $x \rightarrow 0$ के होने पर अस्तित्व है या नहीं (2)

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

ख) सीमा $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x \cos x}{3 + 2x^2}$ का मूल्यांकन करने के लिए लोपिताल नियम को क्या हम लागू कर सकते हैं। पुष्टि कीजिए। (2)

ग) मान लीजिए S एक विवृत डिस्क है जिसका \mathbf{R}^3 में केंद्र (0,0,0) और त्रिज्या 7 है। दिखाइए कि $x \in S$ जहां $x = 3e_1 + e_2 - 3e_3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ और $e_3 = (0,0,1)$ । (3)

घ) मान लीजिए $f(x) = \frac{\pi x^3 - 5x + 7}{2x^3 + 7x - 9}$ और $g(x) = \sin x$, अंतराल $]2, \infty[$ पर परिभाषित वास्तविक चर के दो ऐसे वास्तविक मान फलन है जिनके संयुक्त फलन $g \circ f$ को h से निरूपित करता है। तब $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ का मूल्यांकन कीजिए। (3)

3) क) दिखाइए कि (4)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 5y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन बिंदु (0,0) पर संतत है।

ख) दिक् $\theta = \frac{\pi}{6}$ में (1, 2) पर फलन $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ का दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए। (3)

ग) मान लीजिए $f(x, y) = x^7 - 3x^2y$, जहां $x = 2st$; $y = s^2 - t^2$ तब $\frac{\partial f}{\partial s}$ और $\frac{\partial f}{\partial t}$ ज्ञात कीजिए। (3)

4) क) $f_{xy}(0,0)$ और $f_{yx}(0,0)$ ज्ञात कीजिए, जहां (4)

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xy & |y| \leq |x| \\ -\frac{1}{2}xy & |y| > |x| \end{cases}$$

जांच कीजिए f_{xy} और f_{yx} दोनों बराबर हैं या नहीं।

ख) $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$, ज्ञात कीजिए, जहां $u = x + y - z$; $v = x - y + z$; $w = y + 2x$. (4)

ग) फलन $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ के स्तर वक्रों का वर्णन कीजिए और स्थूल चित्र भी बनाइए। (2)

5) क) $(0,1)$ पर $f(x, y) = 2 + 3x^2 + 5y^2$ का टेलर-बहुपद ज्ञात कीजिए। (3)

ख) लग्रांज गुणांक विधि से सिद्ध कीजिए कि सबसे बड़े क्षेत्रफल और परिमाप 4 वाले आयत, एकक वर्ग है। (3)

ग) चरम मानों के लिए $f(x, y) = x^2 - 6xy + 8y^2 - 7x + 7y + 14$ की जांच कीजिए। (4)

6) क) y -अक्ष $5y = x$ और $y = z$ रेखाओं से बने त्रिकोण द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर फलन $f(x, y) = 2xy + 5e^x$ का द्विक समाकल प्राप्त कीजिए। (5)

ख) मान लीजिए W , $x = 0$, $y = 0$, $z = 9$ और पृष्ठ $z = x^2 + y^2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश है। समाकल $\iiint_W 5y \, dx \, dy \, dz$ परिकलित कीजिए। (5)

7) क) निम्नलिखित समाकलन के क्रम में परिवर्तन करने के बाद, मान निकालिए :

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx. \quad (4)$$

ख) घनत्व $d(x, y) = 1 + 3x + y$ वाले उस त्रिभुज पटल, जिसका शीर्ष $(0,0)$, $(1,0)$ और $(0,2)$ है, का द्रव्यमान और गुरुत्व केंद्र निकालिए। (6)

8) क) अस्पष्ट फलन प्रमेय लागू करके दिखाइए कि समीकरण $x^3 + y^3 - 6xy + 4 = 0$ के लिए बिंदु $(1,1)$ के किसी प्रतिवेश में इस समीकरण द्वारा परिभाषित एक ऐसा फलन g होता है जिसके लिए $g(1) = 11$ और g' भी मालूम कीजिए। (3)

ख) आदर्श गैस का मोल का दाब (P), आयतन (V) और तापमान (T) समीकरण $PV = 8.31 T$ से संबंधी है। तापमान $300k$ है और 0.1 प्रति सै. की दर से बढ़ रहा और आयतन $100 L$ है और 0.2 प्रति सै. की दर से बढ़ रहा, ऐसे स्थिति में तापमान जिस दर पर बदल रहा है वह दर ज्ञात कीजिए। (4)

ग) ग्रीन प्रमेय का प्रयोग करके $\int_C (x^5 + 2y) \, dx + (4x - 6y^3) \, dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहां C : वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ है। (3)

9) क) गोलीय निर्देशांकों का प्रयोग करके $\int \int \int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz$ का मूल्यांकन कीजिए जहां B \mathbf{R}^3 में $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ से निरूपित गोला है। (5)

ख) $\int_C y^2 dx + x dy$ परिकलित कीजिए जहां $C, (-5, -3)$ से $(0, 2)$ तक का रेखा खंड है। (5)

10) क) जांच कीजिए कि निम्नलिखित रेखा-समाकल पथ-स्वतंत्र है।

i) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$

ii) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6x - y^3) dx + (6xy - 3xy^2) dy$. (3)

ख) फलन $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ को कब स्थानीय व्युत्क्रमणीय कहलाता है? क्या

$F(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y + 3z, x + y - 1)$ द्वारा दिए गए फलन $F, (0, 1, 2)$ पर स्थानीय व्युत्क्रमणीय है। अपना उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

ग) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{5e^x + 7e^z}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$ अवकलनीय नहीं है। (4)